

育教学论坛, 2017(1): 162-163  
9 孙伟, 刘荣梅, 李晨等. 信息化时代“材料力学”课内外教学的

若干实践. 南京航空航天大学学报(社会科学版), 2015, 17(1):  
107-111

(责任编辑: 胡漫)

## 教授讲题

# 如何推动箱子更省力?

李俊峰<sup>1)</sup> 马曙光

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

### 题目

长方体形状的均质箱子放在粗糙水平面上, 摩擦因数为  $\mu$ , 如果想用一个力推在箱子上, 使其从静止开始运动的临界情况有哪些? 哪种情况比较省力? 请给出定性分析和简化的定量分析 (改编自清华大学 2018 年 1 月期末试题)。

### 解答

箱子由静止开始运动的临界情况有 3 种: (1) 箱子底面不离开水平面, 开始作刚体平动 (以下简称平动); (2) 箱子底面不离开水平面, 开始作刚体平面运动, 可以看作绕某个铅锤轴的瞬时转动 (以下简称转动); (3) 箱子底面部分脱离水平面, 开始绕箱子某个棱边作刚体定轴转动 (以下简称翻倒)。

设箱子重量为  $m$ , 下面分别针对临界情况对应的推力进行简化定量分析。

(1) 平动情况: 假设推力水平分量为  $F_{1h}$ , 竖直分量为  $F_{1v}$ , 如图 1 所示。由竖直方向受力平衡可知支持力为  $N = mg - F_{1v}$ , 由水平方向受力平衡可知推力水平分量大小为  $F_{1h} = \mu N$ 。推力大小为  $F_1 = \sqrt{F_{1v}^2 + F_{1h}^2}$ , 通过计算极小值可得  $F_{1\min} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} mg$ , 这个推力大小与箱子尺寸无关。

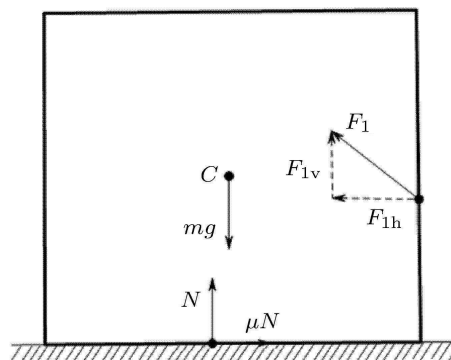


图 1 平动情况

(2) 转动情况: 不妨把箱子简化为一个放置于水平面的长条状物体, 水平推力垂直于箱子, 如图 2 所示。此时假设杆长为  $l$ , 摩擦力方向的切换点  $O$  距离施力点的距离为  $x$ , 那么  $O$  两端受到方向相反的摩擦力作用, 其合力分别为  $f_1 = \frac{\mu m(l-x)g}{l}$  和  $f_2 = \frac{\mu m x g}{l}$ , 由受力平衡可知  $f_2 = F_2 + f_1$ , 由力矩平衡可知  $f_2 \frac{x}{2} = f_1 \left( \frac{l-x}{2} + x \right)$ , 解得  $F_2 = (\sqrt{2} - 1) \mu m g$ , 这个推力大小与箱子尺寸无关。

(3) 翻倒情况: 不妨把箱子简化为一个竖直平面, 宽为  $w$ , 高为  $h$ , 如图 3 所示。那么由力矩平衡可知  $F_3 \sqrt{w^2 + h^2} = mg \frac{w}{2}$ , 解得  $F_3 = \frac{mg}{2\sqrt{1 + (h/w)^2}}$ , 这个推力大小与箱子尺寸 (高宽比)

本文于 2018-04-13 收到。

1) E-mail: lijunf@tsinghua.edu.cn

引用格式: 李俊峰, 马曙光. 如何推动箱子更省力? 力学与实践, 2018, 40(3): 337-338

Li Junfeng, Ma Shuguang. How to push a box with less effort? *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(3): 337-338

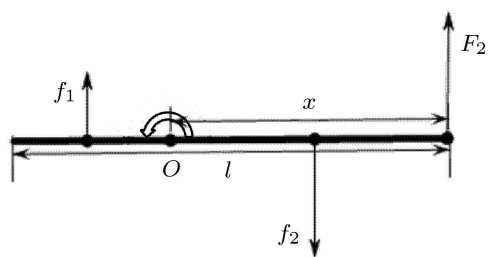


图2 转动情况

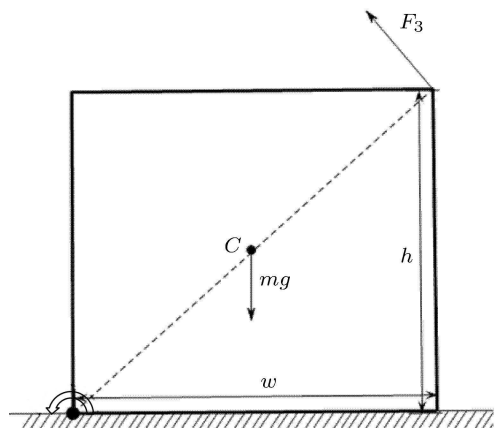


图3 翻倒情况

有关。

简单推导可得，当  $\mu \leq \sqrt{2+2\sqrt{2}}$  时， $F_{1\min} \geq F_2$ ；当  $\mu > \sqrt{2+2\sqrt{2}}$  时， $F_{1\min} < F_2$ ，但  $F_{1\min} >$

$\frac{1}{2}mg > F_3$ 。因此， $F_{1\min} \geq \min\{F_2, F_3\}$ 。

综上可以得出 3 个结论：(1) 平动情况总是比转动情况更费力；(2) 如果摩擦因数和箱子高宽比同时都比较小，即较光滑地面上放置矮箱子，使其转动更省力；(3) 如果摩擦因数和箱子高宽比同时都比较大，即较粗糙地面上放置高箱子，使其翻倒更省力。

以上就是本题的全部解答。结论 (1) 符合生活经验，结论 (2) 和 (3) 既符合生活经验又很直观。如果读者有兴趣，经过简单的数值计算，可以给出图 4 所示的更具体更直观的结果。

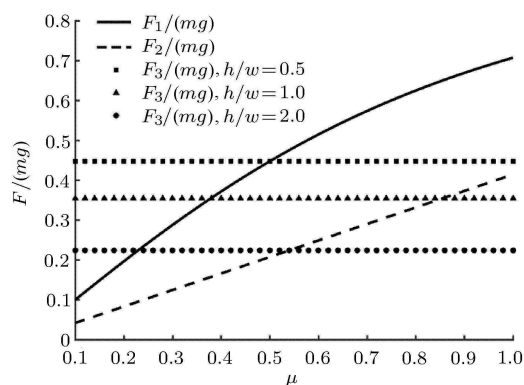


图4  $F_{1\min}$  和  $F_2$  随摩擦因数变化， $F_3$  随高宽比变化

**致谢** 感谢本刊编委邱信明教授给出的修改建议。

(责任编辑: 胡漫)